UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 27-01-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Determine si la función es continua y diferenciable.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

Para probar la continuidad se debe cumplir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Por lo que vamos a la definición de límites para comprobar la veracidad del mismo

Acotamos. $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}\right| < \varepsilon \ \ => \ \ \left|\frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right| < \left|\frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\right| = |x| < \varepsilon \ \ => \quad \delta = \varepsilon$$

La función es continua, luego hallemos las derivadas parciales para así determinar el gradiente de la función.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 0 - \left\langle \binom{1}{0}, \binom{x}{y} \right\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - x & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ -x \quad si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Realizando algebra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\begin{cases} -\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ -x \quad si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ => \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} -\dfrac{2xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Evaluamos por rectas el límite probable. Rectas de ecuación $y = mx$

$$\lim_{x\to 0}\begin{cases} -\dfrac{2m^2x^3}{x^2(1+m^2)x\sqrt{1+m^2}} \\ -\dfrac{x}{x\sqrt{1+m^2}} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\begin{cases} -\dfrac{2m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2m^2}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{1}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Se concluye que el limite no es único ya que depende de la pendiente de la recta por lo cual el limite no existe.

***.-** Determine el gradiente de$h$, donde $h = f0g$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^3y + y^2 \\ y^3x \end{pmatrix} \quad ; \quad f(u,v) = u^2 + \sin(v)$$

SOLUCION.

Observamos $g: R^2 \to R^2$, $f: R^2 \to R$, luego la composición es posible

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} u = x^3y + y^2 \\ v = y^3x \end{pmatrix} \xrightarrow{f} u^2 + \sin(v) \quad \Rightarrow \quad h = f\big(g(x,y)\big)$$

Luego el gradiente de h será

$$\nabla h = \nabla f\big(g(x,y)\big)\nabla g(x,y)$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla f(u,v) = (2u \quad \cos(v))$$

$$\nabla h(x,y) = (2u \quad \cos(v))_{\substack{u = x^3y + y^2 \\ v = y^3x}} \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x,y) = (2(x^3y + y^2) \quad \cos(y^3x)) \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 + 2y \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^3y + y^2)(3x^2y) + \cos(y^3x)\, y^3 \\ 2(x^3y + y^2)(x^3 + 2y) + \cos(y^3x)(3y^2x) \end{pmatrix}$$

2.- Sean $f: R^2 \to R^2$ y $g: R^3 \to R^2$ dos campos vectoriales definidos por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x))$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2)$$

a. Halle las diferenciales $Df(x, y)$ y $Dg(u, v, w)$
b. Halle la diferencial de $Dh(1, -1, 1)$ para la función $h(u, v, w) = f\big(g(u, v, w)\big)$

Solución.

a.- $Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}_{2x2}$; $Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$

b.- Se tiene que:

$$Dh(u,v,w) = Df(x,y) * Dg(u,v,w) \;=>$$

$$Dh(u,v,w) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{pmatrix}_{\substack{x=u+2v^2+3w^3 \\ y=2v-u^2}} \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores correspondiente.

$$Dh(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\cos(9) & \cos(9) \end{pmatrix}_{\substack{x=6 \\ y=-3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;=>\; Dh(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6\cos(9) & 18\cos(9) \end{pmatrix}$$

3.- Halle el valor de $\nabla h(0,0)$, donde $h = f\big(g(x,y)\big)$

$$f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \tan(u-1) - e^v \\ u^2 - v^2 + w \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \\ \cos(y-x) \\ e^{-y} \end{pmatrix}$$

SOLUCION.

Observamos que: f: $R^3 \to R^2$; $g: R^2 \to R^3$, luego la composición esta correcta

$$\nabla h(x,y) = \nabla f\big(g(x,y)\big)\nabla g(x,y) \;=>\; \nabla h(0,0) = \nabla f(1,1,1)\nabla g(0,0)$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \sin(y-x) & -\sin(y-x) \\ 0 & -e^{-y} \end{pmatrix} \;=>\; \nabla g(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \sec^2(u-1) & -e^v & 0 \\ 2u & -2v & 1 \end{pmatrix} \;=>\; \nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -e & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -e & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=>\; \nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.- Sea $h: R^2 \to R$ tal que se tiene

$$h(x,y) = f\left(g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)\right)$$

Con $u(x,y) = xy$; $v(x,y) = x + y$; $g: R \to R$; $f: R \to R$

Si se sabe que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(-1,1) = 3 \ ; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1) = -9 \ ; \quad g(-1) = 0 \ \ y \ f'(0) = 3$$

Calcule $g'(-1)$.

SOLUCION.

Se tiene que

$$R^2 \overset{\varphi}{\to} R \overset{f}{\to} R \quad donde \ \ h = f\big(\varphi(x,y)\big) \ \ con \ \varphi(x,y) = g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)$$

$$\nabla h(x,y) = \nabla f\left(g\big(u(x,y)\big) - v(x,y)\right)\left[\nabla g\big(u(x,y)\big)\nabla u(x,y) - \nabla v(x,y)\right]$$

$$\nabla h(-1,1) = \nabla f(g(-1) - 0)\left[\nabla g(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(-1,1)\\ \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1)\end{pmatrix} = f'(0)\left[g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} = 3g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix} = 3g'(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad g'(-1) = 2$$

5.- Sea la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ determinar el plano tangente a la ecuación y es paralelo al plano xz.

SOLUCION.

Sabemos que la normal del plano xz es $\nabla(xz) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, buscamos el gradiente de la función.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}2x-2\\2y\\-2z\end{pmatrix}$$

Sabemos que son paralelos entonces se cumple que

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se despejan los valores y se obtiene que

$$x = 1 \;\; ; \quad y = \frac{k}{2} \;\; ; \quad z = 0$$

Sustituimos estos valores en la función para hallar el valor de k que se necesita.

$$1 + \frac{k^2}{4} - 2 = 0 \quad => \quad k = \pm 2$$

Luego el punto tangente será $A(1,1,0)\ y\ \ B(1,-1,0)$, luego el plano tangente será

Para A.

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad => \quad 2y - 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{y = 1} \;\in \boldsymbol{R^3}$$

Para B.

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad => \quad 2y + 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{y = -1} \;\in \boldsymbol{R^3}$$

6.- Sea la función

$$f(x,y) = \cos(y) + x^2 - y^2$$

Determine la ecuación del plano tangente a f y es perpendicular a la recta de ecuación

$$(x,y,z) = (0,1,1) + t(2,0,1)$$

SOLUCION.

Buscamos el gradiente de la función se tiene

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2xy \end{pmatrix}$$

Sabemos que el vector director de la recta dada es $\nabla \pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nos dice que los vectores son paralelos entonces

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{OJO en este punto.}$$

Recordemos que:

$$z = \cos(y) + x^2 - xy^2 \quad => \quad \cos(y) + x^2 - xy^2 - z = 0$$

Por lo que:

$$\nabla S = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Dado a que los vectores son PARALELOS. (Mate3 (FlashBACK) $u = \alpha v$)

$$\nabla S = \boldsymbol{\alpha} \nabla \pi \quad => \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-1} \;\leftarrow \text{"}Tercera\ Ecuacion\text{"}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y) - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad => \quad x = -1 \quad y \quad y = 0$$

Buscamos $z = f(-1,0) \quad => \quad z = 2 \quad => \quad A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es el punto tangente

Luego el plano a la curva de nivel será

$$z - 2 = \langle \nabla f(x_p, y_p), \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} \rangle \quad => \quad \boldsymbol{z = -2x}$$

7.- (Parcial 2011 3-4) Halle los puntos de $S = \{(x,y,z) \in R^3 : 2z = 4x^2 + 6y^2\}$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $\frac{(1-x)}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{(5-z)}{-4}$ y es perpendicular a $-2x + 2y + 6z = 0$

Solución.

$f(x,y) := 2x^2 + 3y^2 \qquad\qquad z = f(x,y)$

Sabemos que el plano tiene normal $\quad n := (-2 \;\; 2 \;\; 6)$

Y la recta tiene vector director $\quad l := (2 \;\; 3 \;\; 4)$

El plano tangente a $f(x,y)$ es paralelo a la recta (vectores perpendiculares) y el perpendicular al plano (vectores perpendiculares). Se busca entonces un vector que sea perpendicular a l y n al mismo tiempo esto es producto cruz.

$$N := n^T \times l^T \rightarrow \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad N := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego este vector debe paralelo al gradiente de f(x,y)

$$\mathrm{gradf}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot x \\ 6 \cdot y \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 6y \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (3) $\lambda = 1$

De (1) $x = \frac{-1}{4}$

De (2) $y = \frac{1}{3}$

Buscamos el valor de z. $z := f\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \frac{11}{24}$

Formamos el plano.

$$z - \frac{11}{24} = \blacksquare < \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{1}{4} \\ y - \frac{1}{3} \end{pmatrix} > \blacksquare$$

$z - \frac{11}{24} = -x - \frac{1}{4} + 2y - \frac{2}{3}$ Implica $z = 2y - x - \frac{11}{24}$